

О ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭКРАНАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА НАКЛОННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД В ВОЛНОВОДАХ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ ¹

И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский (Казань)

Рассмотрены задачи дифракции собственных волн плоского и прямоугольного волноводов с металлическими стенками на идеально проводящих тонких экранах, расположенных на наклонной границе раздела двух сред. Показано, что эти задачи сводятся к краевым задачам для уравнения Гельмгольца или для системы уравнений Максвелла в ограниченных прямоугольных областях с нелокальными интегральными условиями на части границы. Построены конечно-разностные аппроксимации задач в ограниченных областях. Для численного решения разностных краевых задач использован метод прогонки.

1⁰. Задача дифракции волн на наклонной границе раздела сред в волноводе (на диэлектрическом клине) относится к классическим некоординатным задачам волноводной электродинамики [1]. Различные приближенные методы решения этой задачи были предложены в работах [2] (метод поперечных сечений), [3], [4] (метод моментов), [5] (метод плоских волн) и [6]. В работе [7] А.А. Кириленко и Л.А. Рудь использовали метод полуобращения при регуляризации бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, полученной методом частичных областей. Аналогичный метод использован в [8] при решении задачи дифракции волны на наклонной диафрагме в волноводе (см. также [1], §10). В [9] А.С. Ильинский и А.А. Воронцов исследовали задачу дифракции на наклонной границе раздела сред методом инте-

¹Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

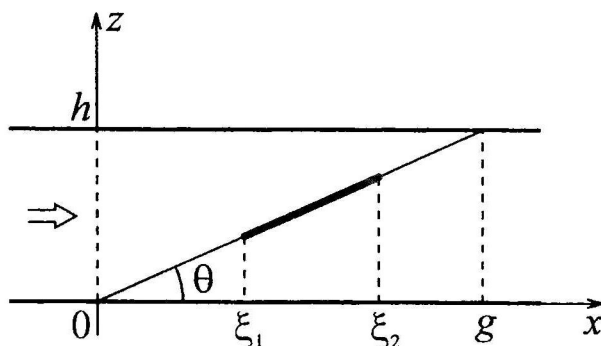
гральных уравнений. Этот же метод использован в работе [10] при решении задачи дифракции на наклонной диэлектрической пластине. В работах [7], [9] проведено сравнение численных данных, полученных различными способами, и показано, что строгие методы дают существенно лучшие результаты, хотя и более трудоемки.

В данной работе исследуется возможность применения конечно-разностных методов при численном решении задач дифракции волн в волноводах на наклонной границе раздела сред, в том числе, при наличии на ней металлических экранов. При этом выделяется ограниченная прямоугольная область в волноводе, содержащая неоднородность. Присоединенные к ней полубесконечные регулярные области заменяются на нелокальные интегральные граничные условия специального вида, связывающие значения искомого решения и его нормальной производной. Метод конечных разностей использовали ранее при решении волноводных задач А.Г. Свешников и А.Н. Боголюбов [11], [12]. В этих работах полубесконечные регулярные участки волноводов также отделяются от сложной области и вместо них рассматриваются парциальные условия излучения. Используемые нами интегральные граничные условия были получены при решении вспомогательных переопределенных граничных задач в полубесконечных областях с условиями Коши на части границы, но они имеют тот же смысл, что и парциальные условия. В [11], [12] для численного решения систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих краевые задачи, используются итерационные методы. Мы используем метод прогонки даже в том случае, когда на границе раздела сред имеются металлические пластины.

Сеточными методам решения уравнения Гельмгольца в прямоугольных областях посвящены работы [13], [14] и др. Отметим, что в этих работах рассматривается уравнение Гельмгольца вида $\Delta u - k^2 u = 0$, то есть с отрицательным коэффициентом. В этом случае у однородных краевых задач нет ненулевых решений и относительно легко удастся построить доказательство сходимости численного метода (одномерный случай рассмотрен в качестве

примера в книге [15], п. 28.1). В нашем случае уравнение Гельмгольца имеет вид $\Delta u + k^2 u = 0$, поэтому обоснование численного метода становится более сложным.

2⁰. Пусть $z = hx/g$, $0 < x < g$ – наклонная граница раздела двух сред в плоском волноводе с металлическими стенками $z = 0$ и $z = h$; ε_1 и ε_2 – диэлектрические проницаемости среды слева и справа от этой границы. На границе раздела сред расположен идеально проводящий бесконечно тонкий металлический экран $z = hx/g$, $\xi_1 < x < \xi_2$. Предположим, что компоненты поля не зависят от координаты y . Рассмотрим задачу дифракции приходящей слева ТЕ-поляризованной электромагнитной волны на экране.



Обозначим θ угол наклона границы раздела сред, $\operatorname{tg} \theta = g/h$. Пусть $u^0(x, z)$ – потенциальная функция внешнего поля. Потенциальная функция $u(x, z)$ искомого поля в каждой из сред должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(x, z)u = 0, \quad (1)$$

где при $0 < z < h$

$$k^2(x, z) = \{k_0^2 \varepsilon_1, x < z \operatorname{tg} \theta; \quad k_0^2 \varepsilon_2, x > z \operatorname{tg} \theta\},$$

$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Пусть в каждой из сред магнитная проницаемость $\mu = 1$, и выбрана зависимость компонент поля от времени в виде $\exp(i\omega t)$.

На стенках волновода должны выполняться условия

$$u(x, 0+0) = 0, \quad u(x, h-0) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (2)$$

Обозначим $H = \pi/h$, $\varphi_m(t) = \sin mHt$,

$$\begin{aligned} \gamma_{j,m} &= \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - (mH)^2} = \\ &= \begin{cases} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - (mH)^2}, & k_0^2 \varepsilon_j - (mH)^2 \geq 0, \\ -i\sqrt{(mH)^2 - k_0^2 \varepsilon_j}, & k_0^2 \varepsilon_j - (mH)^2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$K_j(t, z) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{j,m}} \varphi_m(t) \varphi_m(z), \quad j = 1, 2.$$

В работе [16] исследована переопределенная задача Коши для уравнения Гельмгольца в полуплоскости. Необходимое и достаточное условие ее разрешимости устанавливает связь между граничными функциями. В периодическом случае эта связь может быть сформулирована на языке коэффициентов Фурье граничных функций. Если решение уравнения Гельмгольца в полуполосе продолжить на полуплоскость, то можно получить следующие утверждения.

Лемма 1. Если $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца в полуполосе $\{x < 0; 0 < z < h\}$, удовлетворяющее условиям (2) в классе решений, уходящих от границы $x = 0$ влево, то

$$u(0-0, z) = -i \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(0-0, t) K_1(t, z) dt, \quad 0 < z < h.$$

Если $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца в полуполосе $\{x > g; 0 < z < h\}$, удовлетворяющее условиям (2) в классе решений, уходящих от границы $x = g$ вправо, то

$$u(g+0, z) = i \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(g+0, t) K_2(t, z) dt, \quad 0 < z < h.$$

Рассмотрим прямоугольник $[0, g] \times [0, h]$. Из условий сопряжения полей при $x = 0$ и $x = g$ следует, что

$$u(0 + 0, z) = -i \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(0 + 0, t) K_1(t, z) dt + 2u^0(0 - 0, z), \quad (3)$$

$$u(g - 0, z) = i \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(g - 0, t) K_2(t, z) dt, \quad 0 < z < h. \quad (4)$$

Обозначим $M = (\xi_1, \xi_2)$, $N = (0, \xi_1) \cup (\xi_2, g)$. На границе раздела сред вне экрана должны выполняться условия

$$u(x + 0, hx/g) = u(x - 0, hx/g), \quad x \in N, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x + 0, hx/g) = \frac{\partial u}{\partial n}(x - 0, hx/g), \quad x \in N, \quad (5)$$

причем $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial}{\partial z} \cos \theta$, а на экране

$$u(x + 0, hx/g) = 0, \quad u(x - 0, hx/g) = 0, \quad x \in M. \quad (6)$$

Теорема 1. *Задача дифракции ТЕ-волны на металлическом экране, расположенном на наклонной границе раздела сред в плоском волноводе, эквивалентна краевой задаче для уравнения Гельмгольца (1) с кусочно-постоянным коэффициентом в прямоугольнике с граничными условиями (2), (3), (4) и условиями сопряжения (5), (6) на линии раздела сред.*

3⁰. В работе [17] построена и исследована с помощью абстрактной приближенной схемы [18] конечно-разностная аппроксимация граничной задачи (1)–(6). Аппроксимирующая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) состоит из $(n + 1)^2$ уравнений:

$$\frac{u_{j+1,k} + u_{j-1,k}}{h_x^2} + \frac{u_{j,k+1} + u_{j,k-1}}{h_z^2} + \left(k^2(x_j, z_k) - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_z^2}\right) u_{j,k} = 0, \quad (7)$$

$$j, k = 1 \dots n-1, j \neq k;$$

$$u_{j,0} = 0, \quad u_{j,n} = 0, \quad j = 0 \dots n; \quad (8)$$

$$u_{0,k} = -\frac{2i}{h} \sum_{l=0}^n A_l \frac{u_{1,l} - u_{0,l}}{h_x} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,l} \varphi_{m,k}}{\gamma_{1,m}} + 2u_0(0, z_k), \quad k = 1 \dots n-1; \quad (9)$$

$$u_{n,k} = \frac{2i}{h} \sum_{l=0}^n A_l \frac{u_{n,l} - u_{n-1,l}}{h_x} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,l} \varphi_{m,k}}{\gamma_{2,m}}, \quad k = 1 \dots n-1; \quad (10)$$

$$u_{j,k} = 0, \quad j = k = n_1 \dots n_2; \quad (11)$$

$$\frac{u_{j+1,k} + u_{j-1,k}}{h_x} \sin \theta - \frac{u_{j,k+1} + u_{j,k-1}}{h_z} \cos \theta - \\ - 2 \left(\frac{\sin \theta}{h_x} - \frac{\cos \theta}{h_z} \right) u_{j,k} = 0, \quad j = k = 1 \dots n_1 - 1, n_2 + 1 \dots n; \quad (12)$$

здесь $x_j = jh_x$, $h_x = g/n$, $z_k = kh_z$, $h_z = h/n$; $u_{j,k} = u(x_j, z_k)$, $\varphi_{m,k} = \varphi_m(z_k)$; A_l — коэффициенты квадратурной формулы. Для простоты рассуждений считаем, что $\xi_1 = x_{n_1}$, $\xi_2 = x_{n_2}$.

Отметим, что уравнения (12) получены из условия непрерывности на границе раздела сред нормальной производной функции $u(x, z)$. Непрерывность самой функции $u(x, z)$ обеспечена тем, что при $j = k$ значения $u_{j,k}$ используются как предельные значения на границе раздела как слева, так и справа. Если металлический экран отсутствует, то в аппроксимирующей СЛАУ уравнений вида (11) нет и в уравнениях (12) $j = k = 1 \dots n$.

4⁰. Построим модификацию метода прогонки, представляющую собой быстрый алгоритм решения СЛАУ (7)–(12). Основную идею алгоритма изложим сначала для частного случая задачи, когда металлический экран отсутствует, а среда внутри волновода однородна, то есть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Запишем уравнения СЛАУ (7)–(12) в векторно-матричной форме. Пусть $u^j = (u_{j,0}, \dots, u_{j,n})$, $j = 0 \dots n$ – столбцы матрицы $\{u_{j,k}\}$. Тогда краевые условия (9) и (10) можно представить в виде

$$h_x u^0 = -B_l (u^1 - u^0) + 2h_x u_0^0, \quad (13)$$

$$h_x u^n = B_r (u^n - u^{n-1}), \quad (14)$$

где B_l, B_r – известные матрицы и u_0^0 – заданный вектор, составленный из значений $u^0(0, z_k)$. Уравнения (7) перепишем так:

$$u^{j-1} = -u^{j+1} + C u^j, \quad j = 1 \dots n-1, \quad (15)$$

где C – трехдиагональная матрица (здесь учтены уравнения(8)).

Будем искать векторы u^j в виде $u^j = A^j u^n$, $j = 0 \dots n$, где A^j – вспомогательные искомые матрицы, причем $A^n = E$ (единичная матрица). Из (14) следует, что $A^{n-1} = E - h_x B_r^{-1}$, а уравнения (15) дают рекуррентную формулу

$$A^{j-1} = C A^j - A^{j+1}, \quad j = n-1 \dots 1. \quad (16)$$

При этом уравнение (13) превращается в уравнение для определения u^n :

$$[B_l(A^1 - A^0) + h_x A^0] u^n = 2h_x u_0^0. \quad (17)$$

Таким образом, метод прогонки сводится к следующим действиям:

- 1) вычисляем матрицы B_r, B_l, B_r^{-1} и C ;
- 2) находим матрицы A^n, A^{n-1} и A^j , $j = n-2 \dots 0$ по формуле (16) (прямой ход прогонки);
- 3) решаем СЛАУ (17) относительно u^n ;
- 4) вычисляем $u^j = A^j u^n$, $j = n-1 \dots 1$ (обратный ход прогонки).

При решении задачи дифракция волны на границе раздела сред без экрана (на диэлектрическом клине) уравнения (7) при $j = k$ заменяются на уравнения (12). Тогда в алгоритме прогонки нужно произвести некоторые изменения. Уравнения (15) принимают вид $u^{j-1} = C_{1,j} u^{j+1} + C_{2,j} u^j$, здесь матричные коэффициенты на каждом шаге по j отличаются от матриц $-E$ и C

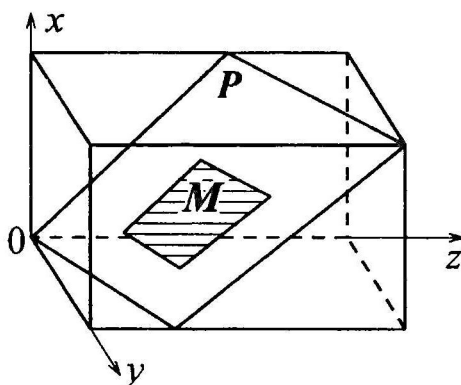
только несколькими элементами. Следовательно, изменяются и рекуррентные формулы (16). Эта корректировка мало влияет на общее время счета. При ограниченных ресурсах памяти во время прямого хода можно хранить только две матрицы A^j , но тогда во время обратного хода нужно будет их перевычислять.

Если же на границе раздела сред имеется металлический экран, то необходимо сделать следующее. Как только во время прямого хода прогонки, двигаясь по узлам сетки справа налево, мы дойдем до экрана, так в силу (11) пересчет коэффициентов при одном из элементов вектора u^n прекращается и уравнение, соответствующее номеру этого элемента, больше не участвует в преобразованиях. При переходе через экран начинается новый пересчет, причем значение $u_{j,j} = 0$ в узле на экране, а для значения $u_{j,j-1}$ слева от экрана условий для определения пока нет. Введем дополнительный искомый вектор v из $u_{j,j-1}$, его размерность m равна числу узлов сетки, попадающих на экран. Полная система уравнений для определения всех неизвестных величин получится тогда, когда на левой стороне прямоугольника завершится прямой ход прогонки. Эта система состоит из уравнений вида (17) и тех уравнений, которые были получены и оставлены без изменений при подходе к экрану слева. Размерность системы $n + 1 + m$. Таким образом, при наличии экрана вместо вектора u^n используется вектор, составленный из пары векторов (u^n, v) . Матрицы A^j также заменяются на матрицы большей размерности, но такой структуры, что во время прямого хода при умножении на них "длинного" вектора (u^n, v) до экрана не меняются компоненты v , а после экрана – соответствующие компоненты u^n .

Метод прогонки в различных частных случаях реализован в виде набора библиотечных модулей языка Object Pascal в среде разработки приложений Borland Delphi. Проведены контрольные расчеты.

50. Аналогичный метод может быть использован для решения задачи дифракции электромагнитной волны на наклонном металлическом экране в прямоугольном волноводе с металличе-

скими стенками [19].



Пусть стенки волновода расположены в плоскостях $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ декартовой системы координат, и плоскость $z = x \operatorname{tg} \theta_1 + y \operatorname{tg} \theta_2$ разделяет волновод по сечению P на две части, левую и правую, с различными диэлектрическими проницаемостями сред ε_{\pm} . На границе раздела сред расположен идеально проводящий бесконечно тонкий экран M . Нужно найти поле, образующееся при дифракции электромагнитной волны, набегающей на M .

Пусть $c = \sup \{z \mid (x, y, z) \in P\}$. Тогда четырехугольник P расположен внутри параллелепипеда $Q = \{0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$. Рассмотрим вспомогательную граничную задачу для полубесконечной части волновода $W^+ : z > c$. Нужно найти уходящие на бесконечность решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E, \quad \operatorname{rot} E = i\omega\mu_0\mu H \quad (18)$$

в области W^+ , удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \quad E_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a; \\ E_y &= 0, \quad E_z = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b, \end{aligned} \quad (19)$$

$$E_{\tau}(x, y, c) = e(x, y), \quad H_{\tau}(x, y, c) = h(x, y), \quad (20)$$

где E_τ , H_τ — касательные составляющие вектор-функций E , H на плоскости $z = c$.

Лемма 2. Если задача (18)–(20) имеет решение в классе решений, уходящих на бесконечность, то

$$e(x, y) = \int_0^a \int_0^b K(s, t; x, y) h(s, t) ds dt, \quad (1)$$

$$K(s, t; x, y) = \left\{ \frac{4}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon a b} K_{ij}(s, t; x, y) \right\}_{i,j=1,2},$$

$$K_{11}(s, t; x, y) = - \sum_n \sum_m \frac{1}{\gamma_{nm}} \frac{\pi n}{a} \frac{\pi m}{b} \varphi_{nm}(s, t) \psi_{nm}(x, y),$$

$$K_{12}(s, t; x, y) = - \sum_n \sum_m \frac{1}{\gamma_{nm}} \left(k^2 - \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \right) \psi_{nm}(s, t) \psi_{nm}(x, y),$$

$$K_{21}(s, t; x, y) = \sum_n \sum_m \frac{1}{\gamma_{nm}} \left(k^2 - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) \varphi_{nm}(s, t) \varphi_{nm}(x, y),$$

$$K_{22}(s, t; x, y) = \sum_n \sum_m \frac{1}{\gamma_{nm}} \frac{\pi n}{a} \frac{\pi m}{b} \psi_{nm}(s, t) \varphi_{nm}(x, y),$$

$$\varphi_{nm}(s, t) = \sin \frac{\pi n s}{a} \cos \frac{\pi m t}{b}, \quad \psi_{nm}(s, t) = \cos \frac{\pi n s}{a} \sin \frac{\pi m t}{b},$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\pm} - (\pi n/a)^2 - (\pi m/b)^2}.$$

Здесь значения радикала вычисляются по тем же правилам, что и в скалярном случае. Доказательство может быть получено из необходимого и достаточного условия разрешимости переопределенной задачи Коши для системы уравнений Максвелла в полупространстве [20]. Аналогичное утверждение имеет место для полубесконечной области $W^- : z < 0$

Задача дифракции на металлическом экране сводится к граничной задаче для системы уравнений Максвелла в параллелепипеде. На границе раздела сред P должны выполняться обычные граничные условия и условия сопряжения: касательные составляющие вектора E равны нулю на M ; касательные составляющие векторов E и H непрерывны на $P \setminus M$.

Теорема 2. *Задача дифракции на металлическом экране эквивалентна граничной задаче для системы уравнений (18) в области Q (при $\epsilon = \epsilon_-$ слева от P и $\epsilon = \epsilon_+$ справа от P) в классе уходящих на бесконечность решений с условиями (19) на боковых стенках, с нелокальными интегральными граничными условиями вида (21) на стенках $z = 0$ и $z = c$ и с условиями сопряжения на прямоугольнике P .*

Построена и частично исследована разностная схема, аппроксимирующая граничную задачу для системы Максвелла с кусочно-постоянным коэффициентом в параллелепипеде.

Литература

- [1] Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. *Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции*. – Киев: Наукова думка, 1984. – 296 с.
- [2] Нефедов Е.И. *Расчет положит. диэлектрических вставок в прямоугольном волноводе* // Радиотехн. и электрон. – 1962. – Т.7, №5. – С.801–
- [3] De Jong G., Offringa W. *Reflection and transmission by a slant interface between two media in a rectangular waveguide* // Int. J. Electron. – 1973. – 34, №4. – P.453–463.
- [4] Chow Y.L., Wu S.C. *A moment method with mixed basis functions for scattering by waveguide junctions* // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. – 1973. – 21, №5. – P.333–340.

- [5] Kashyap S.C. *Slant dielectric interface discontinuity in a waveguide* // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. – 1975. – 23, №2. – P.257–260.
- [6] Капилевич Б.Ю., Симин Н.С. *Отражение от диэлектрического клина в прямоугольном волноводе* // Изв. вузов. Радиофиз. – 1976. – 19, №1. – С.135–140.
- [7] Кириленко А.А., Рудь Л.А. *Дифракция волн на наклонной границе диэлектрических сред в прямоугольном волноводе* // Радиотехн. и электрон. – 1977. – 22, №10. – С.2057–2067.
- [8] Кириленко А.А. *Сочетание различных методов полуобращения в задаче о наклонной диафрагме* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – №1. – С.60–64.
- [9] Ильинский А.С., Воронцов А.А. *Метод интегральных уравнений в задаче о дифракции волн на наклонной границе раздела двух сред в волноводе* // Вычисл. методы и программирование, вып. 28. – 1978. – С.177–194.
- [10] Веселов Г.И., Ильинская О.К. *Решение задачи дифракции на наклонной диэлектрической пластине* // Изв. вузов. Радиофиз. – 1975. – Т.XVIII, №8. – С.1157–1163.
- [11] Боголюбов А.Н., Свешников А.Г. *Применение итерационного метода к исследованию плоских волноводов с неоднородным заполнением* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 1974. – Т.14, №4. – С.947–954.
- [12] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н. *Расчет плоского волноводного трансформатора конечно-разностным методом* // Вычисл. методы и программирование, вып. 28. – 1978. – С.118–133.
- [13] Немчинов С.В., Либов С.Л. *Прямой метод повышенной точности решения краевых задач для уравнения Гельмгольца на сетке точек в прямоугольнике* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 1964. – 4, №4. – С.771–773.

- [14] Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М. *Решение уравнения Гельмгольца методом фиктивных областей* // Вычисл. методы лин. алгебры. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. – С.127–144.
- [15] Треногин В.А. *Функциональный анализ*. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
- [16] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт 2000–1. Казанское матем. об-во. – Казань, 2000. – 50 с.
- [17] Плещинский И.Н. *Численный метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на наклонной металлической пластине в плоском волноводе* // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.13. Казанск. матем. об-во. Матер. всеросс. мол. науч. шк.-конф. – Казань: Изд-во "ДАС", 2001. – С.197–204.
- [18] Плещинский Н.Б. *К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 2000. – №3. – С.39–47.
- [19] Pleshchinskii I.N., Pleshchinskii N.B. *Diffraction of the eigen waves on an inclined medium interface in the waveguides with metallic bounds* // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*02. Kiev, Ukraine, Sept. 10–13, 2002. Vol.2. – P.546–548.
- [20] Pleshchinskii N.B. *Integral transforms method in the conjunction problems of electromagnetic fields* // Functional-Analytic and Complex Methods, their Interactions, and Applications to Partial Differential Equations (ed. W.Tutschke). – Publishing House World Scientific, 2001. – P.161–177.